25/11/2020

Πόρισμα (του Θεωρήματος 2): Αν (X,d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f είναι φραγμένη.

Θεώρημα 3: Αν $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ είναι συνεχής και ο (X,d) είναι συμπαγής μ.χ., τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ορισμός: Απόσταση σημείου x από το σύνολο E ($x\in X$, $E\subseteq X$):

$$d(x,E)=\inf\{d(x,y): y\in E\}.$$

Π.χ. $d(0,(0,1))=0$, αλλά $0\notin(0,1)$.

Παρατήρηση: Αν $x\in E \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} d(x,E)=0$.

Πρόταση 1: Έστω $E\subseteq X$ συμπαγές. Έστω $x\in X$. Τότε, $\exists y\in E$, τ.ω. $d(x,y)=d(x,E)$. Επίσης, αν E κλειστό και $d(x,E)=0 \Rightarrow x\in E$.

Απόδειξη:

Για $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $\exists y_n\in E$, τ.ω.:

$d(x,E) \leq d(x,y_n) < d(x,E) + \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow d(x,y_n) \to d(x,E)$.

• Αν E κλειστό και $d(x,E)=0$, δείξαμε ότι $\exists \{y_n\} \subseteq E$, τ.ω. $y_n \to x$ $\Longrightarrow$ $x \in E$ (E κλειστό)

• Αν E συμπαγές, τότε $\exists \{y_n\} \subseteq E$, τ.ω. $d(x,y_n) \to d(x,E)$. Επειδή E συμπαγές, $\exists$ υπακολουθία $\{y_{k_n}\}$ της $\{y_n\}$ και $y \in E$ τ.ω. $y_{k_n} \to y \Rightarrow \lim d(x,y_{k_n}) = d(x,E)$,

άρα $d(x,y) = d(x,E)$. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$. Τότε η συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = d(x,E)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $x,y \in X$, με $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, $\exists a, b \in E$, τ.ω.

$d(x,a) < d(x,E) + \varepsilon/2$,

$d(y,b) < d(y,E) + \varepsilon/2$.

$\Longrightarrow d(y,E) \leq d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a)$

$< \varepsilon/2 + d(x,E) + \varepsilon/2$

$= d(x,E) + \varepsilon$

$\Longrightarrow d(y,E) - d(x,E) < \varepsilon$

$\Longrightarrow f(y) - f(x) < \varepsilon$

• Ομοίως, $f(x) - f(y) < \varepsilon$

Δηλ. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in X$, με

$d(x,y) < \delta$, όπου $\delta = \varepsilon/2$.

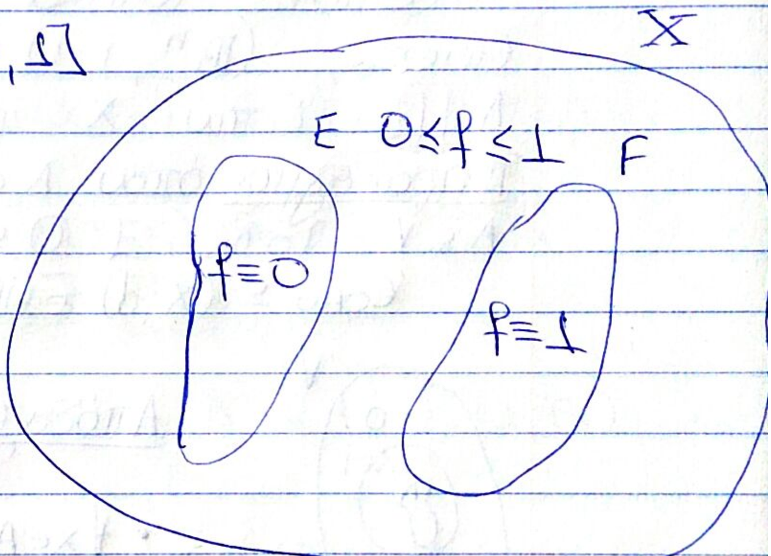
Δηλ. f ομ. συνεχής. ☒

<u>Θεώρημα (Λήμμα του Urysohn)</u>: Έστω (X,d) μ.χ. και E, F κλειστά υποσύνολα του X, τ.ω. $E \cap F = \emptyset$. Τότε, $\exists f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής, με τις εξής ιδιότητες:

i) $f(X) \subseteq [0,1]$

ii) $f|_E \equiv 0$

iii) $f|_F \equiv 1$.



<u>Απόδειξη</u>:

Ορίζουμε $f: X \to \mathbb{R}$, με

τύπο $f(x) = \dfrac{d(x,E)}{d(x,E) + d(x,F)}$.

• $d(x,E) + d(x,F) > 0$, $\forall x \in X$

Πράγματι, αν $x \in E \Rightarrow x \notin F \xRightarrow[F \text{ κλειστό}]{\Pi \Sigma} d(x,F) > 0$.

αν $x \notin E \xRightarrow[E \text{ κλειστό}]{\Pi \Sigma} d(x,E) > 0$.

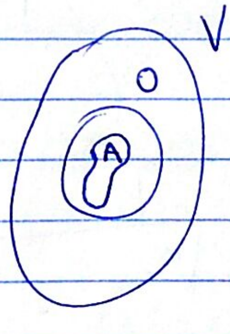
• Το ότι ισχύουν οι ιδιότητες (i)-(iii) είναι τετριμμένο. ☒

<u>Ορισμός 1</u>: Έστω $f: X \to \mathbb{R}$. Φορέας της f: $supp(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.
↳ support

<u>Ορισμός 2</u>: (X,d) τοπικά συμπαγής, αν $\forall x \in X$ $\exists r_x > 0$, τ.ω. $\overline{B(x, r_x)}$ συμπαγές σύνολο.

<u>Π.χ.</u> Έστω (X,d), X μη κενό σύνολο, d η διακριτή μετρική στο X, τότε
$B(x, 1/2) = \{x\} \Longrightarrow B(x, 1/2)$ συμπαγής. Δηλαδή (X,d) τοπικά συμπαγής.
Επίσης, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ τοπικά συμπαγής.

<u>Λήμμα</u>: Έστω X τοπικά συμπαγής μ.χ., $A, V \subseteq X$ όπου A συμπαγές, V ανοικτό, τ.ω. $A \subseteq V$. Τότε $\exists$ $O \subseteq X$ ανοικτό, τ.ω.
$$A \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq V \text{ και } \overline{O} \text{ συμπαγές.}$$



<u>Απόδειξη</u>:

• $\forall x \in A$, $\exists r_x' > 0$, τ.ω. $\overline{B(x, r_x')}$ συμπαγές.

• $\forall x \in A \Longrightarrow x \in V \xRightarrow{V \text{ ανοικτό}}$
$\exists r_x'' > 0$, τ.ω. $B(x, r_x'') \subseteq V$.

• Για $x \in A$, θέτουμε $r_x := \min\{r_x', \frac{r_x''}{2}\}$.

Τότε, $\overline{B(x, r_x)} \subseteq \overline{B(x, r_x')} \xRightarrow[\text{προηγ. μαθήματος}]{\text{Πόρισμα 3 του}}$
$\overline{B(x, r_x)}$ συμπαγές.

• Έστω $\{x_n\} \subseteq B(x, r_x)$, τ.ω. $x_n \to y$, για κάποιο $y \in X$. Τότε:

$$d(x_n, x) < \frac{r_x''}{2} \Rightarrow d(y,x) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

$$< \frac{r_x''}{2} + d(x_n, y) \to \frac{r_x''}{2} + 0 = \frac{r_x''}{2}$$

$$\Longrightarrow d(y,x) \leq \frac{r_x''}{2} < r_x'' \Longrightarrow$$

$$y \in B\left(x, \frac{r_x''}{2}\right) \subseteq V$$

• Άρα, τελικά $\overline{B(x, r_x)} \subseteq V$, $\forall x \in A$.

• Η οικογένεια $\{B(x, r_x) : x \in A\}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του A. $\xRightarrow{A \text{ συμπαγές}}$

$$\exists\ x_1, \ldots, x_n \in A, \text{ τ.ω. } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x, r_x)$$

$=: O$

Όμως, (κάποια ασκ. φ2) $\overline{O} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, r_{x_i})}$ και

$\overline{O} \subseteq V$ και $\overline{O}$ συμπαγές (πεπερασμένη ένωση συμπαγών είναι συμπαγές σύνολο). ☒

<u>Θεώρημα</u>: (Διαμέρισης της μονάδας) Έστω (X, d) τοπικά συμπαγής μ.χ. $A \subseteq X$ συμπαγής και $V_1, \ldots, V_n$ ανοιχτά σύνολα, τ.ω. $A \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Τότε, $\exists f_i : X \to \mathbb{R}$ συνεχής, $i = 1, \ldots, n$ τ.ω.

(i) $0 \leq f_i(x) \leq 1$, $\forall x \in X$, $i = 1, \ldots, n$.

(ii) $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq V_i$ και $\mathrm{supp}(f_i)$ συμπαγές, $i=1,\dots,n$

(iii) $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$.

<u>Απόδειξη</u> : • Έστω $x \in A$. Τότε, $\exists i \in \{1,\dots,n\}$, τ.ω. $x \in V_i$.

Αφού $\{x\}$ συμπαγές (προηγ. Λήμμα) $\exists U_x$ ανοικτό, τ.ω. $U_x \ni x$, $\overline{U_x}$ συμπαγές και $\overline{U_x} \subseteq V_i$.

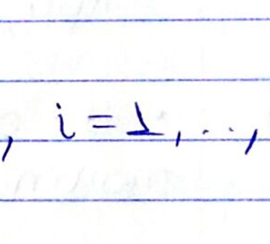
• Η οικογένεια $\{U_x : x \in A\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $A \xRightarrow{A\ \text{συμπαγές}} \exists x_1,\dots,x_m \in A$, τ.ω. $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j}$

Θέτουμε $O_i : \bigcup_{\substack{j \in \{1,\dots,m\} \\ \overline{U_{x_j}} \subseteq V_i}} U_{x_j}$, $i=1,\dots,n$.

Τότε, $\overline{O_i}$ συμπαγές, $\overline{O_i} \subseteq V_i$ και $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$

• Έστω $i \in \{1,\dots,n\}$. Προηγούμενο Λήμμα $\Rightarrow$ $\exists B_i$ ανοικτό, τ.ω. $\overline{O_i} \subseteq B_i \subseteq \overline{B_i} \subseteq V_i$.

• Έστω $i \in \{1,\dots,n\}$.



Επειδή, B_i^c, $\overline{O_i}$ είναι κλειστά και ξένα, Λήμμα Urysohn $\Rightarrow$ $\exists g_i : X \to [0,1]$, συνεχής, τ.ω. $g_i|_{\overline{O_i}} \equiv 1$, $g_i|_{B_i^c} \equiv 0$.

• Ομοίως, $\exists h : X \to [0,1]$, συνεχής, τ.ω.

$h|_A \equiv 1$, $h|_{\left(\bigcup_{i=1}^{n} O_i\right)^c} \equiv 0$.

• Θέτουμε $f_i := \dfrac{g_i}{(1-h) + \sum_{i=1}^{n} g_i}$.

• Ο παρονομαστής είναι θετικός, αφού όλες οι ποσότητες είναι ≥ 0 κ' αν $1-h(x)=0$.
$\Rightarrow x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{n} O_i\right)^c \Rightarrow \exists\, i \in \{1,\dots,n\}$, τ.ω.

$x \in O_i \subseteq \overline{O_i} \Rightarrow g_i(x) = 1 > 0$.
Επίσης, $0 \leq f_i(x) \leq 1$, $\forall x \in X$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$
Επίσης, $supp(f_i) = supp(g_i) \subseteq B_i$, συμπαγές.

Άρα, $supp(f_i)$ συμπαγές , $i=1,\dots,n$.

Τέλος, $(1-h)|_A \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$, $\forall x \in A$. ▨

(για Προτ. 1) Παράδειγμα: Έστω $(X,d) = ([-1,0)\cup(0,1], |\cdot|)$
$E = (0,1]$.
Τότε $E = [0,1] \cap X \Rightarrow$
E κλειστό στον X.
• $d(-1,E) = 1$, αλλά $\nexists\, y \in E$, τ.ω.
$d(y,x) = 1$.

Χώροι πραγματικών Συναρτήσεων.

Παραδείγματα: Έστω (X,d) μ.χ.
• $F(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f$ συνάρτηση$\}$

• $B(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f$ φραγμένη$\}$.

$C(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής} \}$.

Οι $F(X), B(X), C(X)$ εφοδιασμένοι με τις συνήθεις πράξεις $+$ (άθροισμα συναρτήσεων) και $\cdot$ (βαθμωτό γινόμενο, δηλ. πολλαπλασιασμός συνάρτησης με αριθμό) γίνονται πραγματικοί γραμμικοί χώροι.

Συμβολισμός: Έστω $f, g \in F(X)$. Ορίζουμε $(f \vee g) : X \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Ορισμός: Έστω A ένας γραμμικός υπόχωρος του $F(X)$ ($(A, +, \cdot)$ είναι γραμμικός χώρος $\Leftrightarrow \forall f, g \in A$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ισχύει $\lambda f + \mu g \in A$).

Ο A ονομάζεται χώρος συναρτήσεων, αν $\forall f, g \in A$, $f \vee g$, $f \wedge g \in A$.

Π.χ.: $A = \{ P(x) : P(x)$ πολυώνυμο μιας μεταβλητής βαθμού το πολύ $n \}$

Τότε A γρ. υπόχωρος του $F(\mathbb{R})$, αλλά δεν είναι χώρος συναρτήσεων.

Όμως, $F(X)$, $B(X)$, $C(X)$ είναι χώροι συναρτήσεων.

Πρόταση: Έστω $\mathcal{A}$ ένας γραμμικός υπόχωρος του $F(X)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $f \vee g \in \mathcal{A}$, $\forall f, g \in \mathcal{A}$

(ii) $f \wedge g \in \mathcal{A}$, $\forall f, g \in \mathcal{A}$

(iii) $|f| \in \mathcal{A}$, $\forall f \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη (i) $\Longrightarrow$ (ii) $f \vee g + f \wedge g = f + g$

(i) $\Rightarrow$ (iii) $\forall f \in \mathcal{A}$, ισχύει $|f| = (f \vee 0) + ((-f) \vee 0) \xrightarrow{0, f, -f \in \mathcal{A}} |f| \in \mathcal{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $f \vee g = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$, $\forall f, g \in \mathcal{A}$. $\blacksquare$

Ορισμός: Έστω $\mathcal{A}$ γραμμικός υπόχωρος του $F(X)$. Για $f \in \mathcal{A}$, ορίζουμε:

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

Πρόταση: Αν $\mathcal{A} \subseteq B(X)$, τότε η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ είναι μια νόρμα. (που ονομάζεται ομοιόμορφη ή sup-νόρμα στον $\mathcal{A}$).

Απόδειξη: Προφανώς, $\|f\|_\infty \geq 0$, με ισότητα αν-ν $f \equiv 0$. Επίσης, $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\forall f, g \in \mathcal{A}$, έχουμε $\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq$

$$\leq \sup_{x\in X} (|f(x)| + |g(x)|)$$

$$\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty . \boxtimes$$

<u>Παραδείγματα:</u> $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα. Επίσης, αν X συμπαγής, τότε $C(X) \subseteq B(X) \Longrightarrow (C(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.

Αν ο X δεν είναι συμπαγής, τότε η $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι εν γένει νόρμα στον $C(X)$, γιατί υπάρχουν $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχείς και μη φραγμένες (άρα $\|f\|_\infty = \infty$).

<u>Συμβολισμός:</u> Έστω $\mathcal{A}$ ένας γραμμικός υπόχωρος του $B(X)$. Ορίζουμε D να είναι η μετρική που επάγεται από την ομοιόμορφη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στον X.

Δηλ. $D(f,g) = \|f-g\|_\infty$, $f,g \in \mathcal{A}$.